

# Robotik I: Einführung in die Robotik Dynamik

Tamim Asfour, Rüdiger Dillmann

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)  
Hochperformante Humanoide Technologien (H<sup>2</sup>T)



# Robotermodellierung – Überblick

- Geometrische Modellierung
  - Geometrie: mathematische Beschreibung der Form von Körpern
  
- Kinematische Modellierung
  - Kinematik: Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der Bewegungszustände mechanischer Systeme
  
- **Dynamische Modellierung**
  - Dynamik: Untersuchung der Bewegung von Körpern als Folge der auf sie wirkenden Kräfte und Momente

# Inhalt

- Geometrisches Modell
- **Dynamisches Modell**
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

# Dynamisches Modell: Definition & Zweck

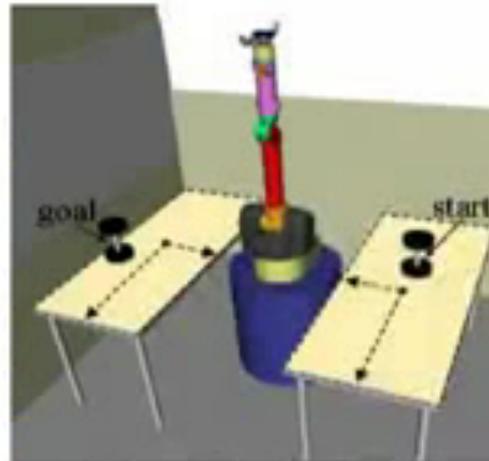
## ■ Definition:

- Das dynamische Modell beschreibt den Zusammenhang von Kräften, Momenten und Bewegungen, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem auftreten.

## ■ Zweck:

- Analyse der Dynamik
- Synthese mechanischer Strukturen
- Modellierung elastischer Strukturen
- Reglerentwurf

## Moving a Heavy Dumbbell with Sliding



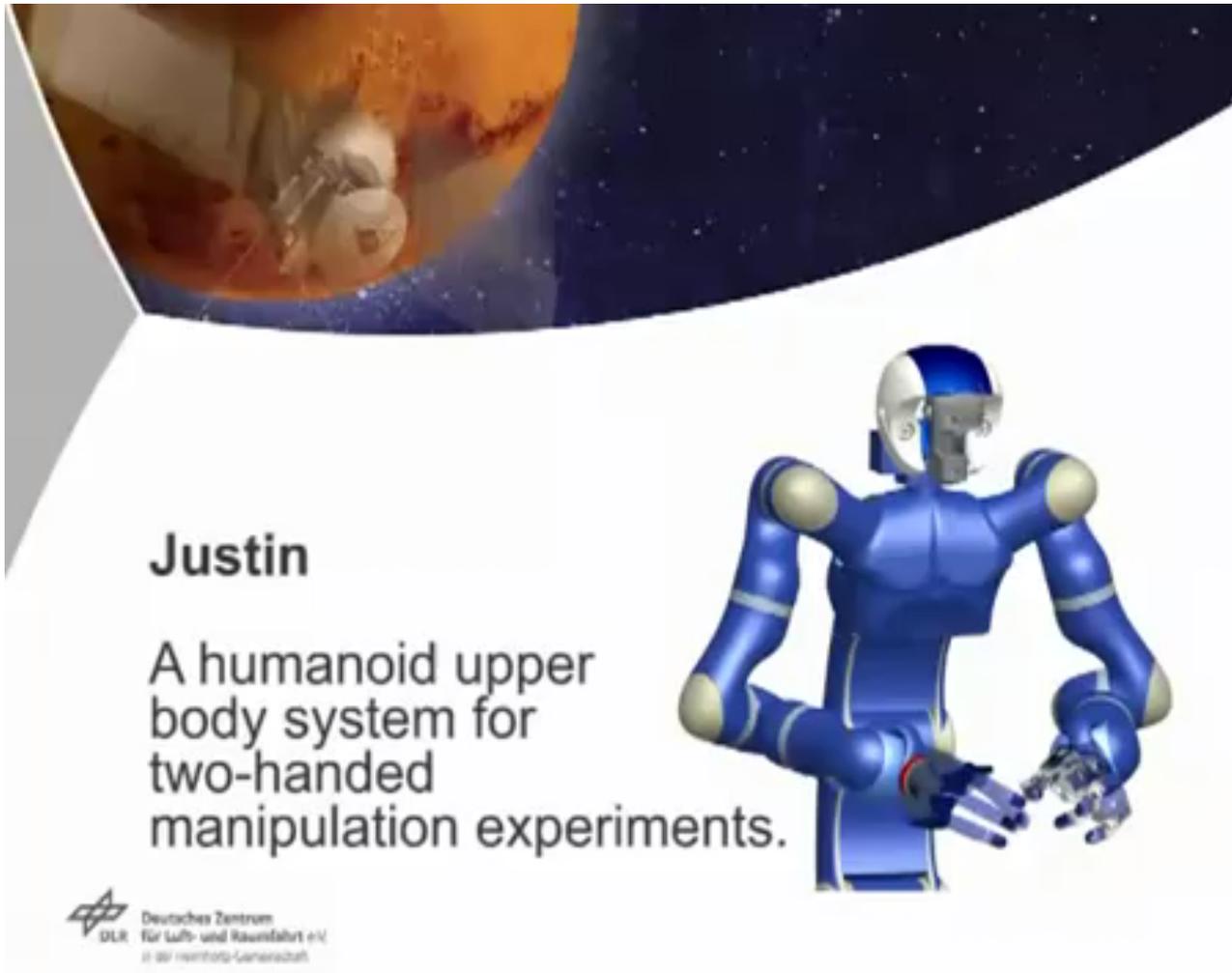
Task: Move the dumbbell from one table to the other.

Constraints:

1. Stay within torque limits of arm for dumbbell mass  $w$ .
2. Sliding the dumbbell is allowed.

<https://personalrobotics.ri.cmu.edu/projects/cplan.php>  
<http://www.youtube.com/watch?v=APAhs7GC090>

# Motivation



**Justin**

A humanoid upper body system for two-handed manipulation experiments.



Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.  
an der Helmholtz-Gemeinschaft

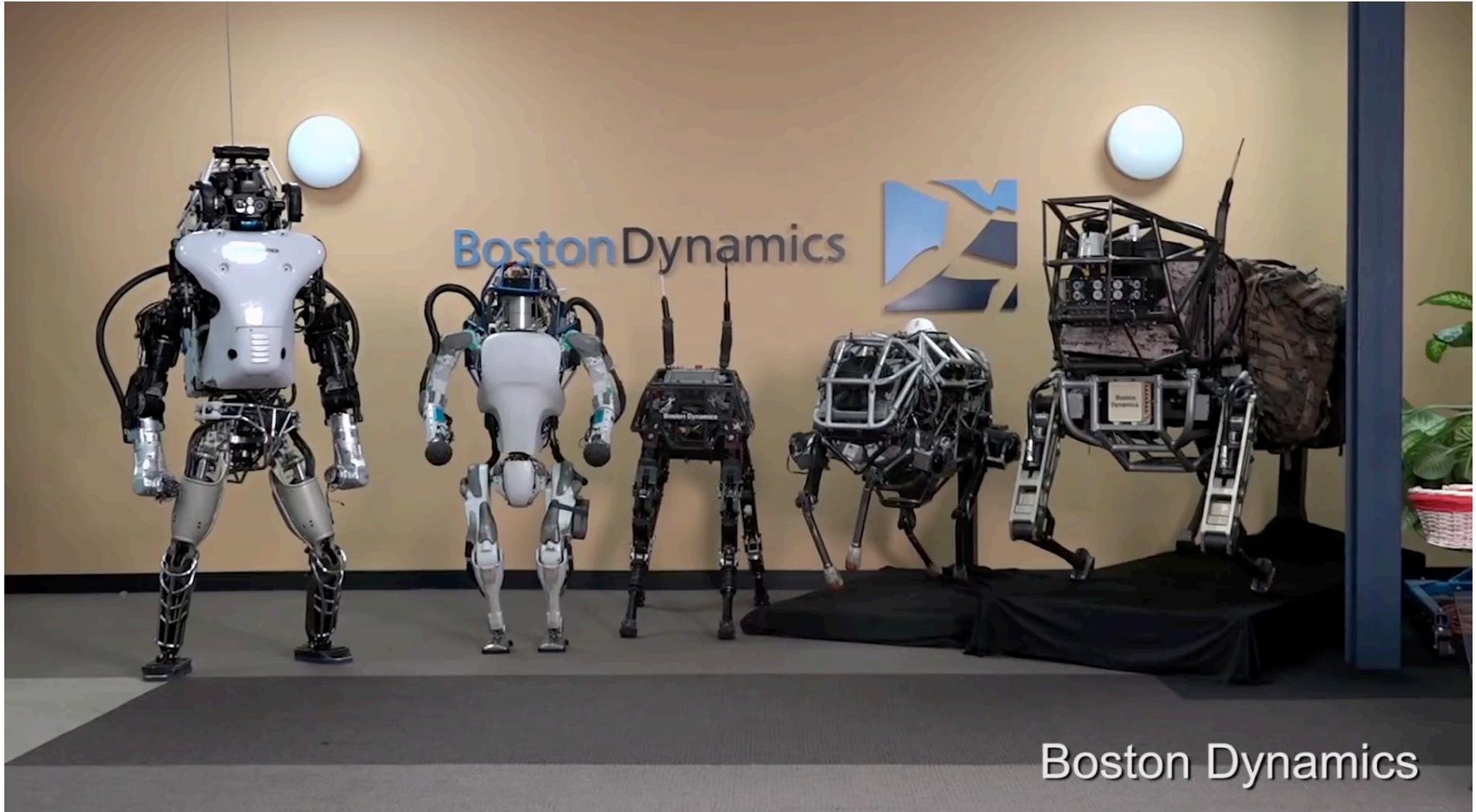
# Motivation



# Motivation



# Motivation



# Dynamisches Modell: Allgemeines Modell

- Roboter besteht aus  $n$  Partikeln mit Masse  $m_i$  und Position  $\mathbf{r}_i$
- Newtons zweites Gesetz:  $\mathbf{F}_i = m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i \quad i = 1, \dots, n$
- Partikel können sich wegen Verbindungen und Gelenken nicht unabhängig voneinander bewegen
  - Einführung von Einschränkungen (constraints) der Form
$$g_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = 0 \quad j = 1, \dots, k$$
  - Einschränkungen dieser Art nennt man auch holonome Einschränkungen
  - Einschränkungen wirken auf den Roboter durch Ausübung von Einschränkungskräften (constraint forces)

# Dynamisches Modell: Allgemeines Modell

- Parameter im allgemeinen Modell

$$3n + k \text{ (da } \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3 \text{)}$$

- Tatsächliche Freiheitsgrade

$$3n - k$$

- Ziel:

Minimaler Parametersatz, der das System vollständig beschreibt

➔ Generalisierte Koordinaten

# Dynamisches Modell: Generalisierte Koordinaten

## ■ Definition:

Minimaler Satz an voneinander unabhängigen Koordinaten, der den aktuellen Systemzustand vollständig beschreibt.

## ■ Generalisierte Koordinaten:

$$q_1, \dots, q_m \quad \text{mit} \quad m = 3n - k$$

## ■ Gesucht: Funktionen für Position der Massepunkte

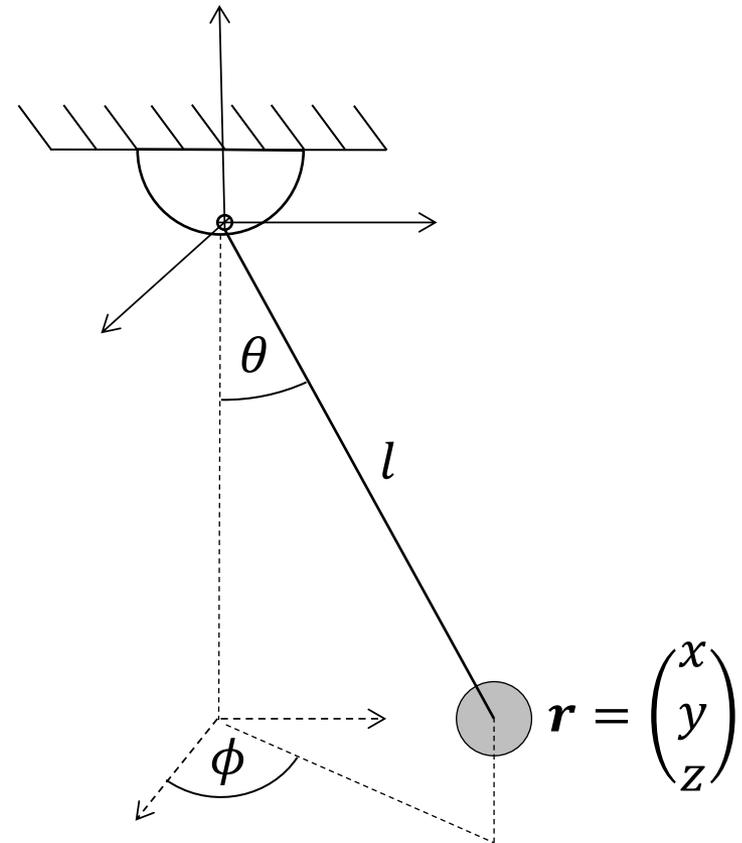
$$\mathbf{r}_i = f_i(q_1, \dots, q_m) \quad i = 1, \dots, n$$

## ■ die gleichzeitig die Einschränkungen (constraints) einhalten

$$g_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

# Generalisierte Koordinaten : Beispiel

- Position der Masse:  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Einschränkung auf Kugeloberfläche
  - $|\mathbf{r}| = l \Leftrightarrow |\mathbf{r}| - l = 0$
  - $g(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| - l = 0$
- Gen. Koordinaten:  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$ 
  - $\mathbf{r} = f(\mathbf{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$



# Dynamisches Modell: Bewegungsgleichung

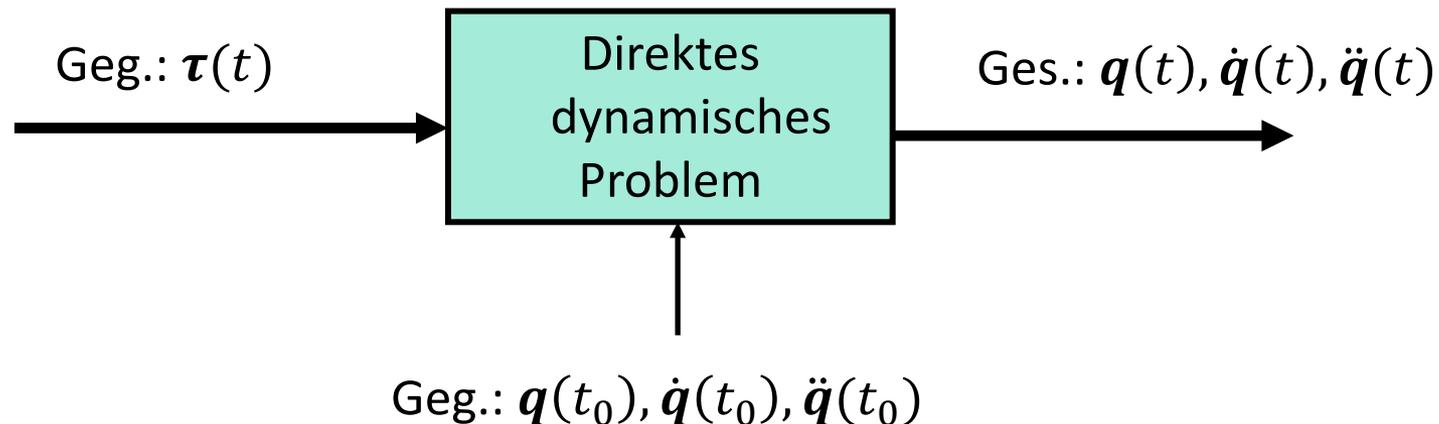
- Im dynamischen Modell werden die Beziehungen zwischen Kräften/Momenten und den Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Armelemente dargestellt.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

- $\boldsymbol{\tau}$ :  $n \times 1$  Vektor der generalisierten Kräfte
- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ :  $n \times n$  Massenträgheitsmatrix
- $\mathbf{c}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ :  $n \times 1$  Vektor der Zentripetal- und Corioliskomponenten
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ :  $n \times 1$  Vektor der Gravitationskomponenten
- $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ :  $n \times 1$  Vektor der generalisierten Koordinaten  
(Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung)
  
- Reibung kann als zusätzlicher Term einfließen, wird aber häufig vernachlässigt

# Dynamisches Modell: Direktes dynamisches Problem

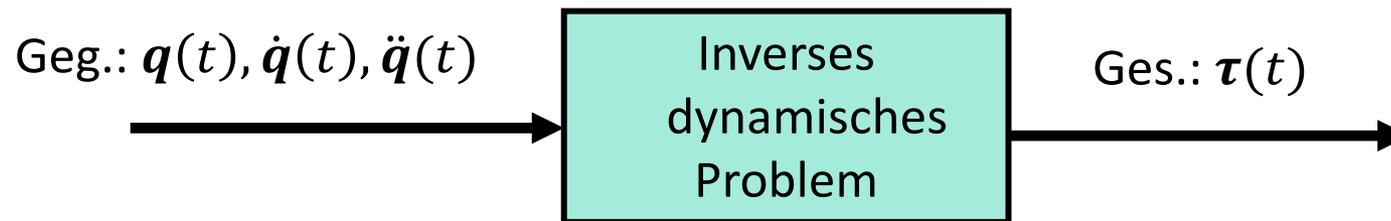
- Aus äußeren Kräften und Momenten sowie Anfangszustand wird unter Verwendung des dynamischen Modells die sich ergebenden Bewegungsänderungen berechnet.



- $\tau = M(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + g(\mathbf{q})$
- Differentialgleichung nach  $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$  lösen

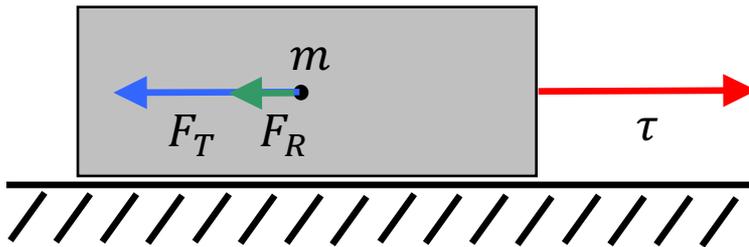
# Dynamisches Modell: Inverses dynamisches Problem

- Aus den gewünschten Bewegungsparametern sollen, unter Verwendung des dynamischen Modells, die dazu erforderlichen Stellkräfte und -momente ermittelt werden.



- $\tau = M(q) \cdot \ddot{q} + c(\dot{q}, q) + g(q)$
- Rechten Teil der Gleichung berechnen

# Dynamisches Modell: Beispiel



$$F_T = -m\ddot{x}$$

Trägheit

$$F_R = -K_{GR}\dot{x}$$

Gleitreibung

$\tau$

Externe Kraft

- Kräftebilanz:  $\tau = -(F_T + F_R)$
- Bewegungsgleichung:  $\tau = m\ddot{x} + K_{GR}\dot{x}$
- Inverses Problem: gegeben Bewegungszustand, welche externe Kraft  $\tau$  wirkt auf das System.
- Direktes Problem: gegeben externe Kraft und aktueller Bewegungszustand, berechne neue Beschleunigung und Geschwindigkeit.

# Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

# Modellierung der Dynamik

## Methoden:

- Lagrange: Analytische Methode
  - Arbeits- oder Energiebetrachtungen
  - Formales Ableiten ergibt die Bewegungsgleichungen
  
- Newton-Euler: Synthetische Methode
  - Basiert auf linearem Impuls und Drehimpuls (Drall)
  - Isoliertes betrachten der Armelemente

# Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

# Methode nach Lagrange

- Lagrange-Funktion:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{pot}(\mathbf{q})$$

- Bewegungsgleichung:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- $q_i$ : i-te Komponente der generalisierten Koordinaten
- $\tau_i$ : i-te Komponente der generalisierten Kräfte

# Methode nach Lagrange: Vorgehen

- Ziel: Ermittle für jedes Gelenk  $i$  eines Roboters die Bewegungsgleichung

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- Vorgehen:

1. Berechne  $E_{kin}$  und  $E_{pot}$
2. Drücke  $E_{kin}$  und  $E_{pot}$  in generalisierten Koordinaten aus

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{pot}(\mathbf{q})$$

3. Berechne die Ableitungen

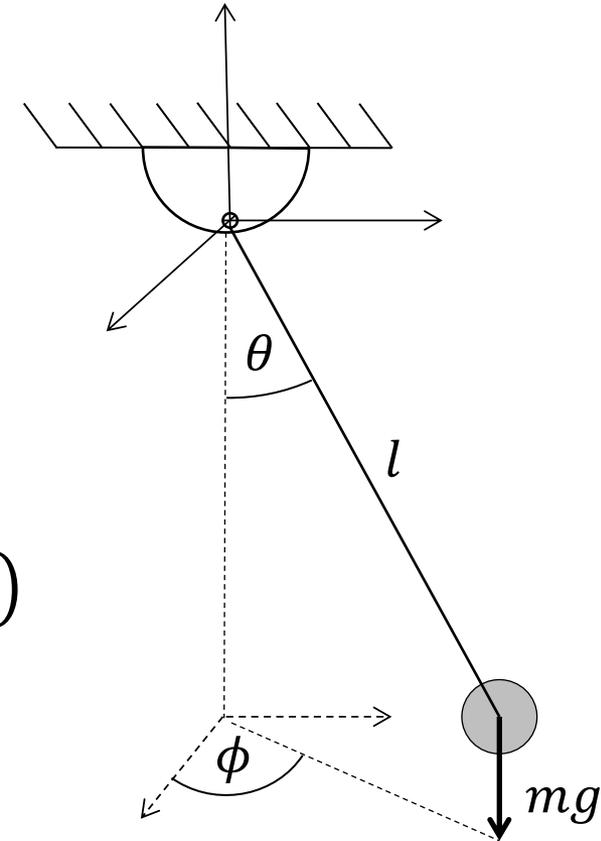
# Methode nach Lagrange: 3D-Pendel I

## ■ 3D-Pendel mit Gravitation

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m l^2 |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2 \theta)$$

$$E_{pot} = -mgh = -mg \cdot (l \cdot \cos \theta)$$



# Methode nach Lagrange: 3D-Pendel II

- Lagrange-Funktion mit  $\mathbf{q} = (\theta, \phi)$

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{pot}(\mathbf{q}) \\
 &= \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2 \theta) + mgl \cdot \cos \theta
 \end{aligned}$$

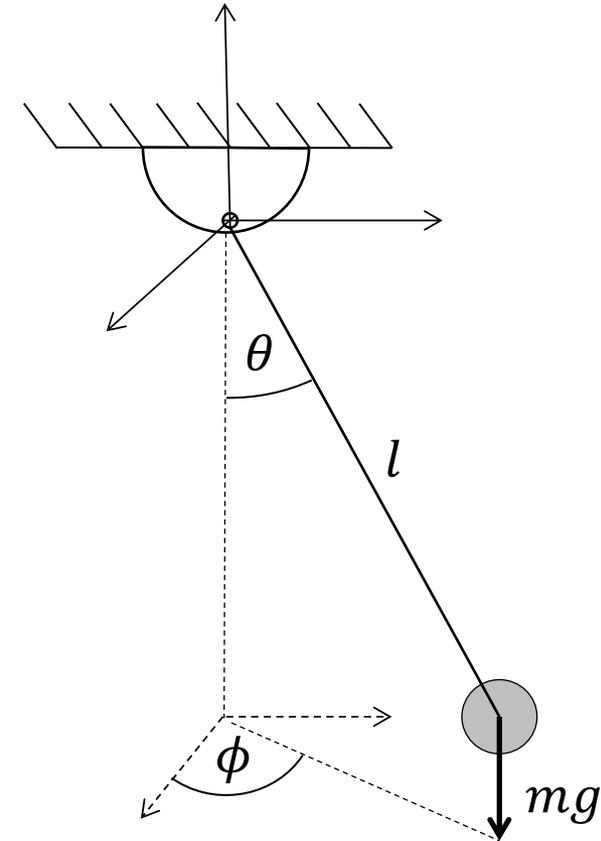
- Ableiten:

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\phi}^2 - mgl \cdot \sin \theta$

- $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = ml^2 \ddot{\theta}$

- $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

- $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\phi} \cdot \sin^2 \theta) =$   
 $ml^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\phi} + 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} \dot{\phi}$



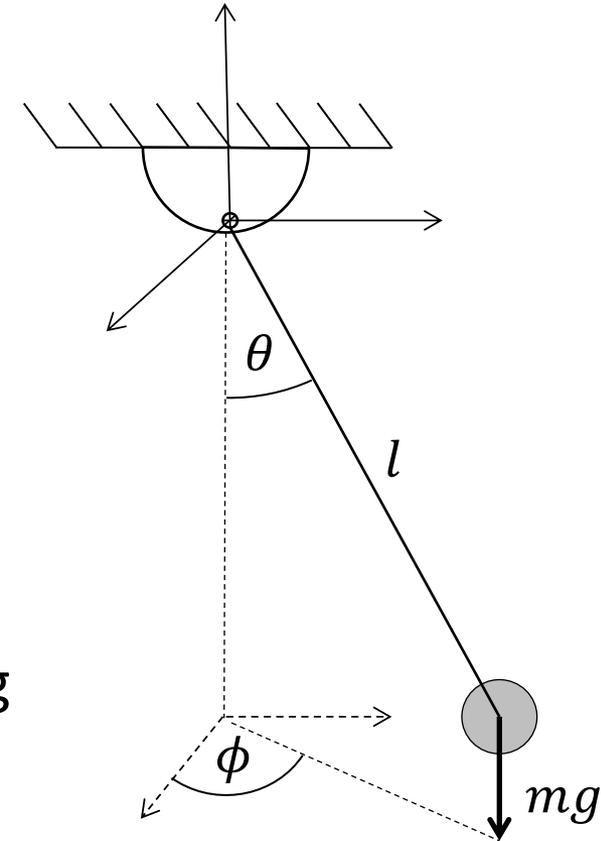
# Methode nach Lagrange: 3D-Pendel III

## ■ Bewegungsgleichung des 3D-Pendels

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} = & \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} -ml^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\phi}^2 \\ 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} \dot{\phi} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

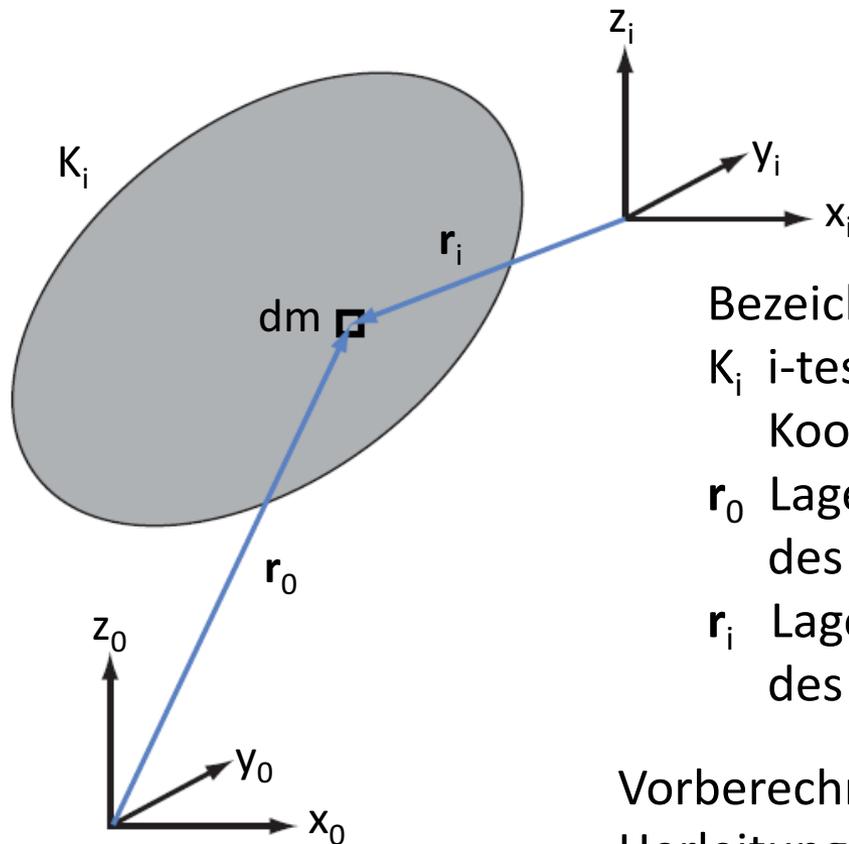
## ■ Entspricht allgemeiner Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} = & M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \\
 & + c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \\
 & + g(\mathbf{q})
 \end{aligned}$$



# Methode nach Lagrange: Ansatz (I)

## Geometrische Vorbetrachtung (I)



Bezeichnungen:

$K_i$   $i$ -tes Armelement starr verbunden mit Koordinatensystem  $i$

$r_0$  Lage eines Massepunktes  $m$  bezüglich des Basiskoordinatensystems

$r_i$  Lage eines Massepunktes  $m$  bezüglich des  $i$ -ten Koordinatensystems

Vorberechnung:

Herleitung der Positionsänderung des Massenpunktes aus generalisierten Koordinaten.

# Methode nach Lagrange: Ansatz (II)

## Geometrische Vorbetrachtung (II)

Aus DH-Matrizen:  $\vec{r}_0 = \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \dots \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i$

Ableitung mit Produktregel:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_0 = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \dots \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i + \mathbf{A}_{0,1} \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{1,2} \dots \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i + \dots + \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \dots \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} = \frac{d}{dt} f^A_{i-1,i}(\mathbf{q}_i(t))$$

# Methode nach Lagrange: Ansatz (III)

## Geometrische Vorbetrachtung (III)

Ableitung mit Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} = \frac{d}{dt} f^A_{i-1,i}(\mathbf{q}_i(t)) = \frac{d}{d\mathbf{q}_i} f^A_{i-1,i} \frac{d}{dt} \mathbf{q}_i$$

$$\frac{d}{d\mathbf{q}_i} f^A_{i-1,i} = \mathbf{O}_{i-1,i} \mathbf{A}_{i-1,i} \quad \text{mit:} \quad \mathbf{O}_R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bewegungsänderung des  
Gelenks

Transformation in  
aktuelle  
Gelenkstellung

Rotationsgelenk

Translationsgelenk

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} = \mathbf{O}_{i-1,i} \mathbf{A}_{i-1,i} \dot{\mathbf{q}}_i \quad (3)$$

# Methode nach Lagrange: Ansatz (IV)

Geometrische Vorbetrachtung (IV)

Mit (2) und (3) folgt:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 = \mathbf{O}_{0,1} \mathbf{A}_{0,1} \dot{\mathbf{q}}_1 \mathbf{A}_{1,2} \dots \mathbf{A}_{i-1,i} \mathbf{r}_i + \dots + \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \dots \mathbf{O}_{i-1,1} \mathbf{A}_{i-1,i} \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{r}_i \quad (4)$$

Darstellung der Bewegung eines Massenpunktes in Abhängigkeit der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten.

Definiere Produktmatrix:

$$\mathbf{P}^{j,i} = \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \dots \mathbf{O}_{j-1,j} \mathbf{A}_{j-1,j} \dots \mathbf{A}_{i-1,i}$$

i: Anzahl Freiheitsgrade  
j: Termindex

Summe der Produktmatrizen:

$$\mathbf{B}^i = \sum_{j=1}^i \mathbf{P}^{j,i} \dot{\mathbf{q}}_j$$

Aus (4) folgt:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 = \mathbf{B}^i \mathbf{r}_i \quad (5)$$

# Methode nach Lagrange: Ansatz (V)

Kinetische Energie (I)

$$\mathbf{E}_{kin,i} = \frac{1}{2} m \left( \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 \right)^2 \quad \xrightarrow{\frac{d}{dm}} \quad d\mathbf{E}_{kin} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 \right)^T \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 dm$$

Mit  $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = sp(\mathbf{v} \mathbf{w}^T)$   $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  :

$$d\mathbf{E}_{kin,i} = \frac{1}{2} sp \left( \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 \left( \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 \right)^T \right) dm$$

Mit (5) :

$$d\mathbf{E}_{kin,i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i)^T (\mathbf{B}^i)^T \right) dm$$

Integration über Masse  $m_i$  des Körpers  $K_i$  :

$$\mathbf{E}_{kin,i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \int_{m_i} \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i)^T dm (\mathbf{B}^i)^T \right)$$

## Methode nach Lagrange: Ansatz (VI)

Kinetische Energie (II)

$$\mathbf{E}_{kin,i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \int_{m_i} \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i)^T dm (\mathbf{B}^i)^T \right)$$

Fasse Integral als Matrix auf:  $\boldsymbol{\theta}^i = \int_{m_i} \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i)^T dm$

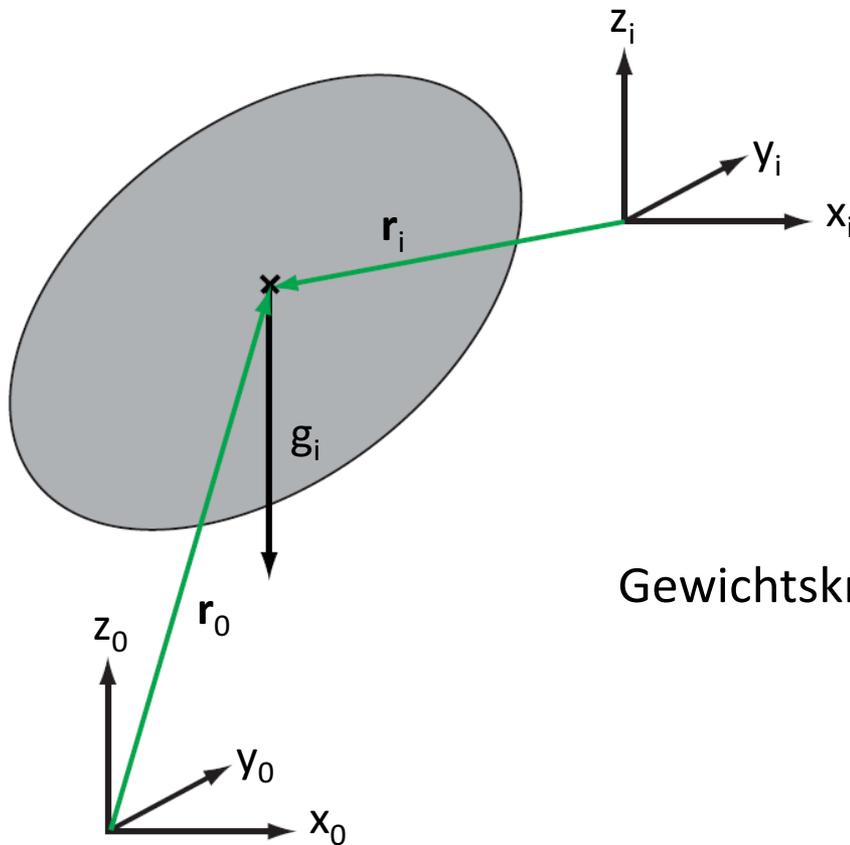
$$\mathbf{E}_{kin,i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \boldsymbol{\theta}^i (\mathbf{B}^i)^T \right)$$

Für die kinematische Energie des gesamten Systems ergibt sich:

$$\mathbf{E}_{kin,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n sp \left( \mathbf{B}^i \boldsymbol{\theta}^i (\mathbf{B}^i)^T \right) \quad (6)$$

# Methode nach Lagrange: Ansatz (VII)

## Potentielle Energie



Gewichtskraft  $g_i$  wirkt auf Körper  $K_i$  im Schwerpunkt  $s$ .

## Methode nach Lagrange: Ansatz (VIII)

Potentielle Energie

$$E_{pot,i} = m_i g h = -(\mathbf{g}_i)^T \mathbf{s}_0 \quad \text{wobei} \quad (\mathbf{g}_i)^T = (0 \quad 0 \quad m_i g \quad 0)$$

Mit  $\mathbf{s}_0 = A_{0,i} \mathbf{s}_i$  folgt:

$$E_{pot,i} = -(\mathbf{g}_i)^T A_{0,i} \mathbf{s}_i$$

Für die potentielle Energie des gesamten Systems ergibt sich:

$$E_{pot,i} = -\sum_{i=1}^n (\mathbf{g}_i)^T A_{0,i} \mathbf{s}_i \quad (7)$$

# Methode nach Lagrange: Ansatz (IX)

## Lagrange Funktion

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$

Mit (6) und (7) folgt:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ sp \left( \mathbf{B}^i \boldsymbol{\theta}^i (\mathbf{B}^i)^T \right) + (\mathbf{g}_i)^T A_{0,i} \mathbf{s}_i \right]$$

## Lagrange Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i}$$

Berechne  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i}$  aus  $L$ .

# Methode nach Lagrange: Ansatz (X)

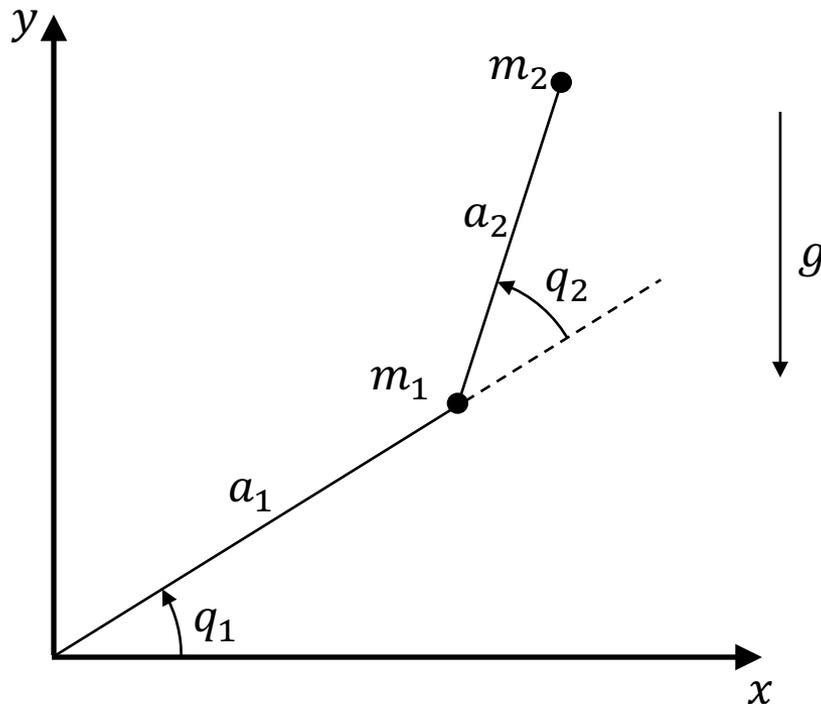
## Lagrange Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
 \tau_i = & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k sp \left[ P^{i,k} \theta^k (P^{l,k})^T \right] \ddot{q}_l - \sum_{k=1}^n (\mathbf{g}_k)^T P^{i,k} \mathbf{s}_k \\
 & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k \left[ sp \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_m} P^{i,k} \theta^k (P^{l,k})^T + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_m} P^{l,k} \theta^k (P^{i,k})^T \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_m} P^{l,k} \theta^k (P^{m,k})^T \right] \dot{q}_l \dot{q}_m
 \end{aligned}$$

➔ n Gleichungen zusammengefasst in Matrixschreibweise:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + g(\mathbf{q})$$

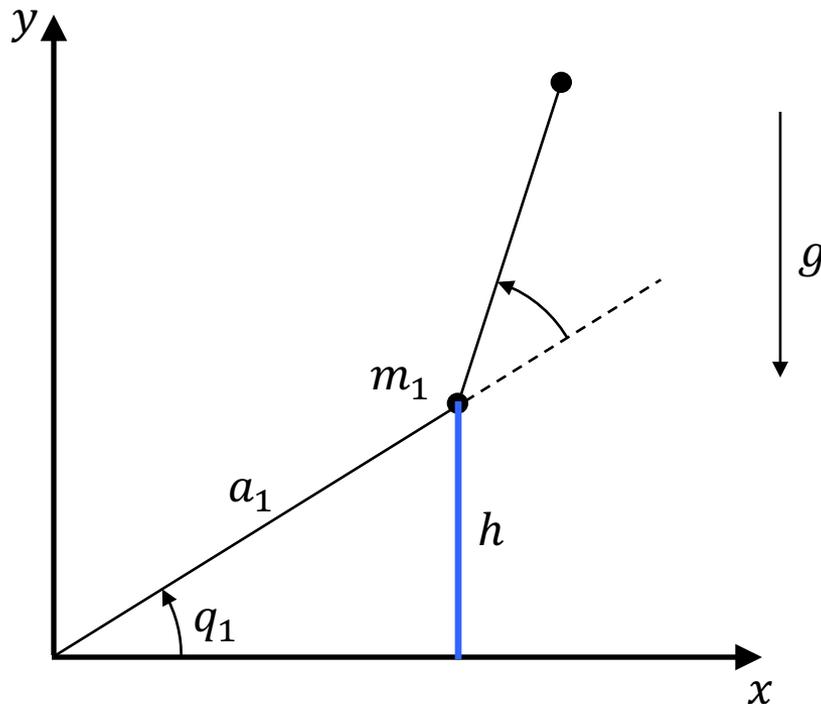
# Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (I)



## ■ Idealisierung:

- Masse der Armelemente als Punktmassen in  $m_1$  und  $m_2$
- Keine Reibung

# Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (II)

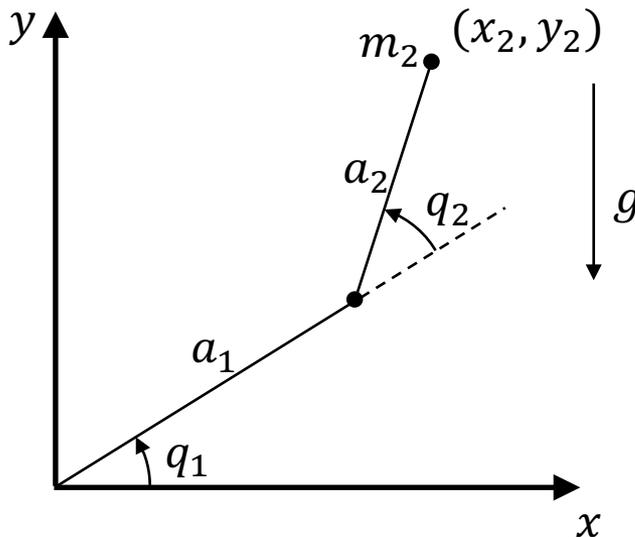


## ■ Gelenk 1:

■  $E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{q}_1^2$

■  $E_{pot,1} = m_1 g h = m_1 g a_1 \sin(q_1)$

# Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (III)



## ■ Gelenk 2:

### ■ Position:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

### ■ Geschwindigkeit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) - a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) + a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

# Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (IV)

## ■ Gelenk 2:

### ■ Kinetische Energie:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = a_1^2 \dot{q}_1^2 + a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2)$$

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 a_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2)$$

### ■ Potentielle Energie:

$$E_{pot,2} = m_2 g y_2 = m_2 g [a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2)]$$

### ■ Lagrange-Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot} = E_{kin,1} + E_{kin,2} - E_{pot,1} - E_{pot,2}$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) a_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2) - (m_1 + m_2) g a_1 \sin(q_1) - m_2 g a_2 \sin(q_1 + q_2)$$

# Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (V)

## ■ Bewegungsgleichung

### ■ Gelenk 1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)a_1^2 \dot{q}_1 + m_2 a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)a_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 a_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos(q_2)$$

$$-m_2 a_1 a_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2)g a_1 \cos(q_1) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

### ■ Gelenk 2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 a_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \ddot{q}_1 \cos(q_2) - m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \sin(q_2) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

# Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (VI)

## ■ Bewegungsgleichung:

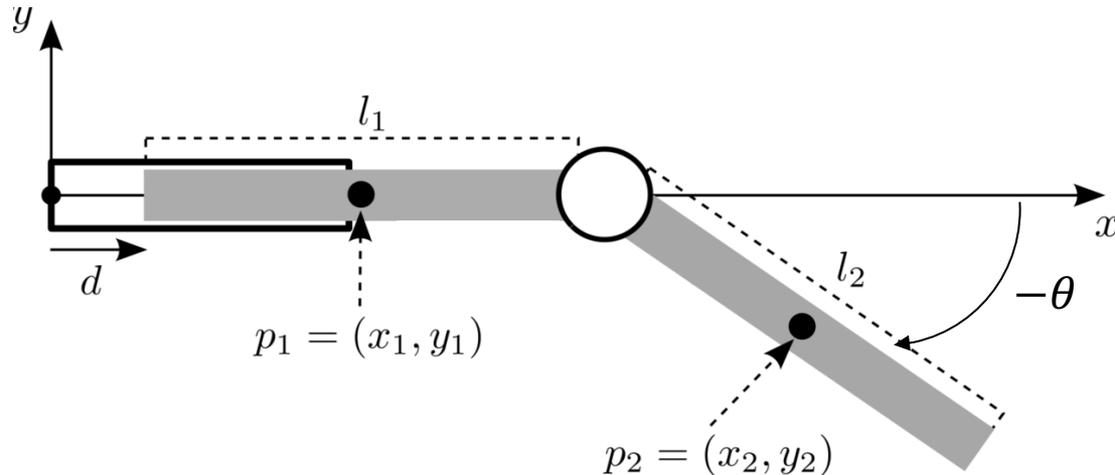
$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)a_1^2 + m_2a_2^2 + 2m_2a_1a_2 \cos(q_2) & m_2a_2^2 + m_2a_1a_2 \cos(q_2) \\ m_2a_2^2 + m_2a_1a_2 \cos(q_2) & m_2a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -m_2a_1a_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin(q_2) \\ m_2a_1a_2\dot{q}_1^2\sin(q_2) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)ga_1 \cos(q_1) + m_2ga_2 \cos(q_1 + q_2) \\ m_2ga_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## ■ Zusammengefasst:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

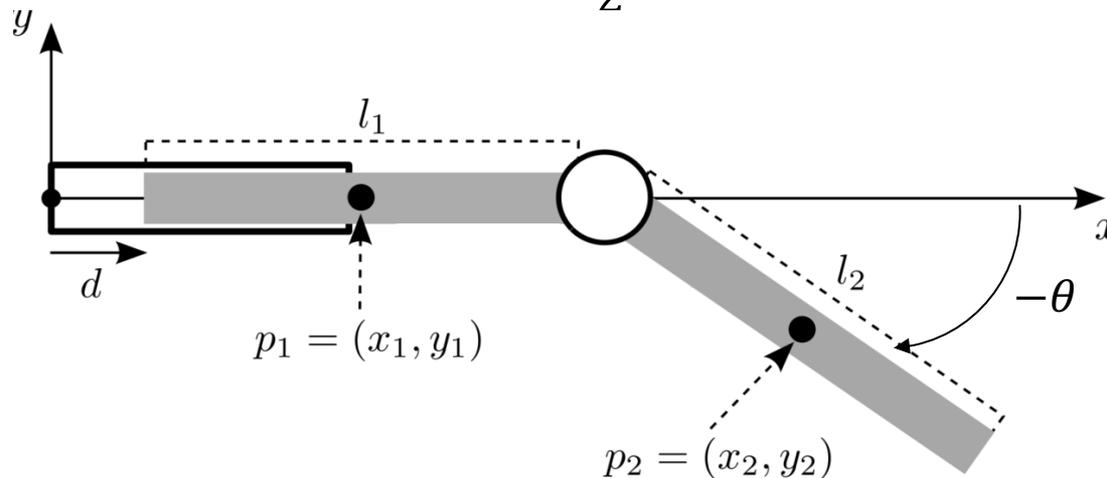
# Lagrange Beispiel mit Lineargelenk

- Gelenke
  - Lineargelenk:  $d$
  - Rotationsgelenk:  $\theta$
- Masseschwerpunkte (Punktmassen  $m_1, m_2$ )
  - $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$



# Lagrange Beispiel mit Lineargelenk II

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2}l_1 + d \\
 y_1 &= 0 \\
 x_2 &= l_1 + d + \frac{1}{2}l_2 \cos(\theta) \\
 y_2 &= \frac{1}{2}l_2 \sin(\theta)
 \end{aligned}$$



# Lagrange Beispiel mit Lineargelenk III

■ Bewegungsgleichung:  $Q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) - \frac{\delta L}{\delta q}$

mit  $L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$

■ Kinetische Energie

- ergibt sich für  $s_1$  aus der Translationsgeschwindigkeit  $\dot{d}$ :

$$E_{\text{kin},1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{d}^2$$

- ergibt sich für  $s_2$  aus der Translationsgeschwindigkeit  $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$ , des Trägheitsmoment  $J$  und der Rotationsgeschwindigkeit  $\dot{\theta}$ :

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},2} &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

- Trägheitsmoment für Stab mit vernachlässigbarem Radius  $J = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$

# Lagrange Beispiel mit Lineargelenk IV

- Translationsgeschwindigkeiten

- $\dot{x}_2 = \dot{d} - \dot{\theta} \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta)$

- $\dot{y}_2 = \dot{\theta} \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta)$

- Daraus folgt:

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{d}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{d} \dot{\theta} \sin(\theta) + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2$$

- Potentielle Energie und Ableitungen können analog zum ersten Beispiel bestimmt werden

- Bewegungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2} m_2 l_2 \sin(\theta) \\ -\frac{1}{2} m_2 l_2 \sin(\theta) & \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{d} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} m_2 g \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

# Methode nach Lagrange: Zusammenfassung

- Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen müssen nur die kinetische und die potentielle Energie aufgestellt werden.
- Die Bewegungsgleichungen folgen dann formal durch differenzieren:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{mit} \quad L = E_{kin} - E_{pot}$$

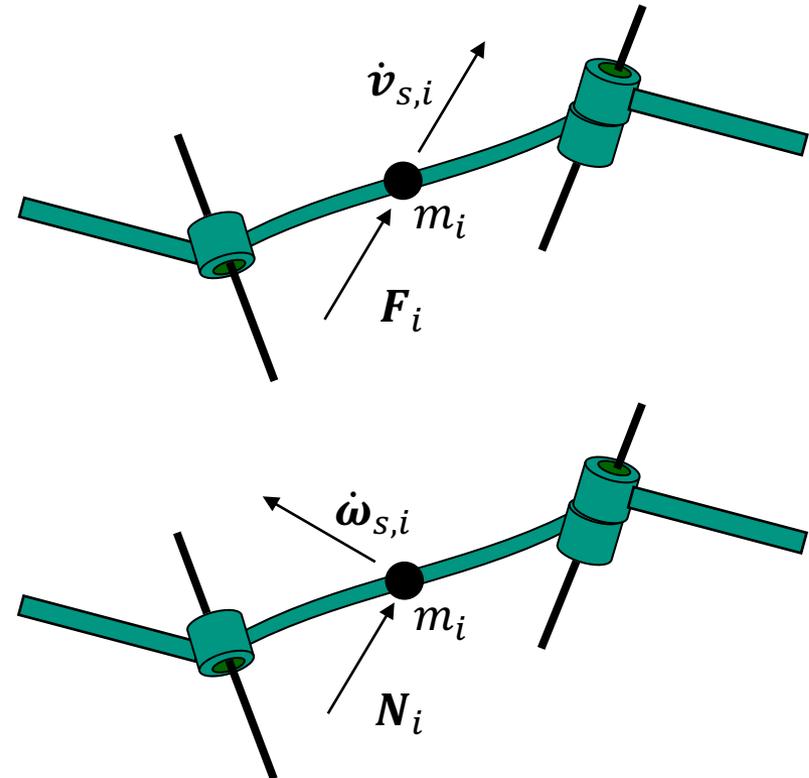
- Einfaches Aufstellen der Gleichungen
- Geschlossenes Modell
- Analytisch auswertbar
- Berechnung sehr umfangreich  $O(n^3)$   
( $n$  : Anzahl der Gelenke)
- Nur Antriebsmomente werden berechnet

# Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

# Methode nach Newton-Euler: Grundprinzip

- Betrachtung des Massenzentrums eines einzelnen Armelementes
  - Kraft = Impuls abgeleitet nach Zeit (Zweites Newtonsches Gesetz)
 
$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_{s,i}) = m_i \dot{\mathbf{v}}_{s,i}$$
  - Drehmoment = Drehimpuls abgeleitet nach Zeit
 
$$\mathbf{N}_i = \frac{d}{dt} (I_i \boldsymbol{\omega}_{s,i}) = I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{s,i}$$
- Kräfte und Momente, die auf ein Armelement wirken, lassen sich aus Geschwindigkeit und Gelenkwinkelgeschwindigkeit berechnen.



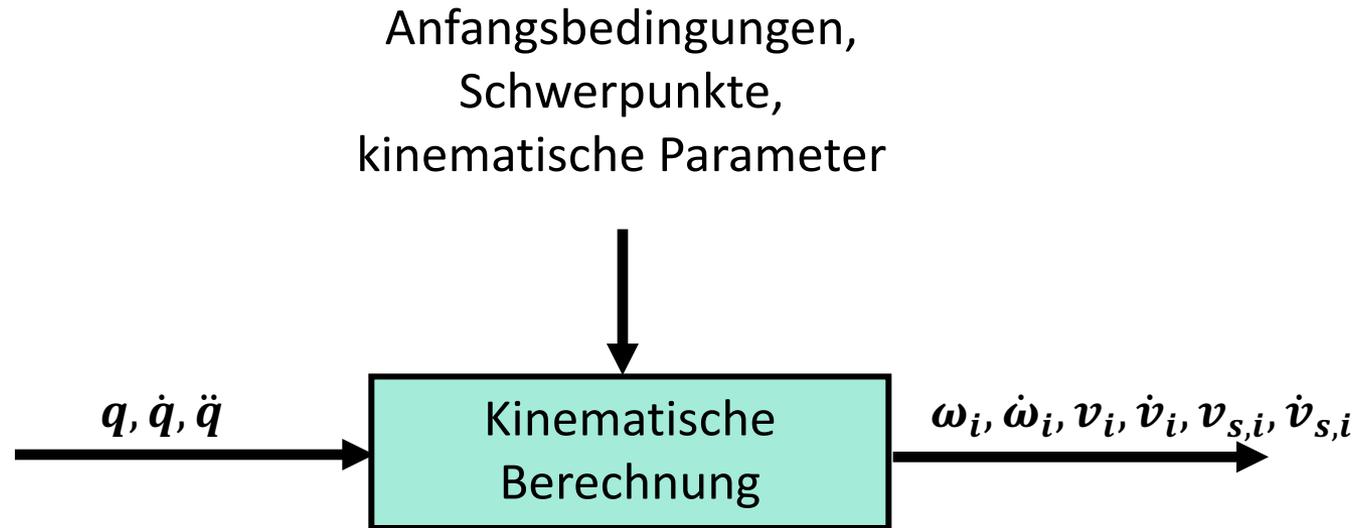
# Methode nach Newton-Euler: Verkettung

- Die Beschleunigungen  $\dot{v}_{s,i}$  und  $\dot{\omega}_{s,i}$  eines Armelementes  $i$  hängen von den Beschleunigungen der vorhergehenden Armelemente ab.
  - Beschleunigungen können über kinematisches Modell **von der Basis zum Greifer** rekursiv berechnet werden
  - Vorwärtsgleichungen
  
- Die Kraft  $F_i$  und das Drehmoment  $N_i$ , die auf ein Armelement  $i$  wirken, hängen von den nachfolgenden Armelementen ab.
  - Kräfte und Momente können **vom Greifer zur Basis** rekursiv berechnet werden
  - Rückwärtsgleichungen

# Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen

- Aus dem kinematischen Robotermodell und dem Systemzustand lassen sich Winkelgeschwindigkeiten, translatorische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gelenkes und Armelementes  $i$  im Basiskoordinatensystem bestimmen.
  
- Bestimmt werden:
  - Winkelgeschwindigkeit  $\omega_i$
  - Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}_i$
  - Geschwindigkeit  $v_i$  und Beschleunigung  $\dot{v}_i$  der Basen der Koordinatensysteme
  - Geschwindigkeiten  $v_{s,i}$  und Beschleunigungen  $\dot{v}_{s,i}$  der Massenmittelpunkte der Armelemente

# Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen



- Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für Armelement  $i + 1$  lassen sich rekursiv unter Berücksichtigung der Kinematik aus den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Armelementes  $i$  berechnen.

# Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen

- Die Funktionen  $G_i$  lassen sich aus den Gleichungen für Kraft und Drehmoment ableiten

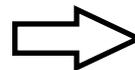
Eingabedaten:  $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$



Rekursive Berechnung der Kinematik von der Basis zum Greifer (Vorwärtsgleichungen)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= G_1(\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dot{\mathbf{q}}_{i+1}) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= G_2(\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dot{\mathbf{q}}_{i+1}, \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}) \\ \mathbf{v}_{i+1} &= G_3(\mathbf{v}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{q}_{i+1}) \\ \dot{\mathbf{v}}_{i+1} &= G_4(\dot{\mathbf{v}}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \mathbf{q}_{i+1}) \\ \mathbf{v}_{s,i+1} &= G_5(\mathbf{v}_{i+1}, \boldsymbol{\omega}_{i+1}) \\ \dot{\mathbf{v}}_{s,i+1} &= G_6(\dot{\mathbf{v}}_{i+1}, \boldsymbol{\omega}_{i+1}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}) \end{aligned}$$

Startwerte der  
Rekursionsformeln  
 $\boldsymbol{\omega}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{v}}_0$

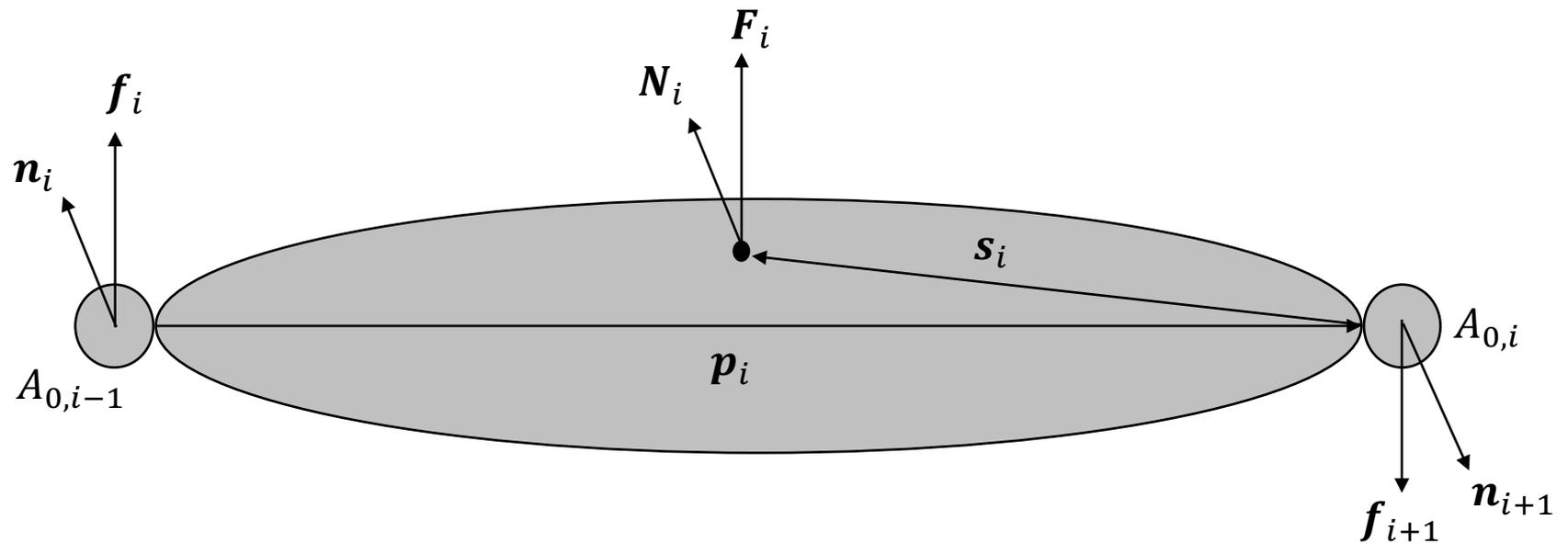


# Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Beginnend vom Greifer des Roboters lassen sich die dynamische Größen des Systems rekursiv bis zur Basis berechnen. Dabei werden die im Vorwärtsschritt berechneten Größen verwendet.
- Folgende dynamische Größen werden bestimmt:
  - Auftretende Kraft  $\mathbf{F}_i$  im Schwerpunkt von Armelement  $i$
  - Auftretender Drehimpuls  $\mathbf{N}_i$  im Schwerpunkt von Armelement  $i$
  - Kraftvektor  $\mathbf{f}_i$  ausgeübt von Armelement  $i - 1$  auf Armelement  $i$
  - Momentvektor  $\mathbf{n}_i$  ausgeübt von Armelement  $i - 1$  auf Armelement  $i$
  - Skalares Drehmoment  $\tau_i$  am  $i$ -ten Gelenk

# Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Betrachtung eines einzelnen Armelements



# Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Verwendung des Kraft-Momenten-Satzes:

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1}$$

- und des Drehimpulssatzes:

$$\mathbf{N}_i = I_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (-\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i) \times \mathbf{F}_i - \mathbf{p}_i \times \mathbf{f}_{i+1}$$

aus Vorwärtsgleichungen

- Rekursive Berechnung der dynamischen Größen des Armelements  $i$
- $m_i$ : Masse des Armelements  $i$
- $I_i$ : Trägheitstensor des Armelements  $i$
- $\mathbf{s}_i, \mathbf{p}_i$ : Geometrische Betrachtung auf vorheriger Folie

# Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

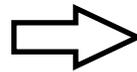


Rekursive Berechnung der Dynamik vom Greifer zur Basis (Rückwärtsgleichungen)

Externe Kräfte und Momente an Endeffektor als Startwerte

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{ex}$$

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{N}_{ex}$$



$$\mathbf{F}_i = H_1(\dot{\mathbf{v}}_{s,i})$$

$$\mathbf{N}_i = H_2(\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$$

$$\mathbf{f}_i = H_3(\mathbf{f}_{i+1}, \mathbf{F}_i, \mathbf{q}_{i+1})$$

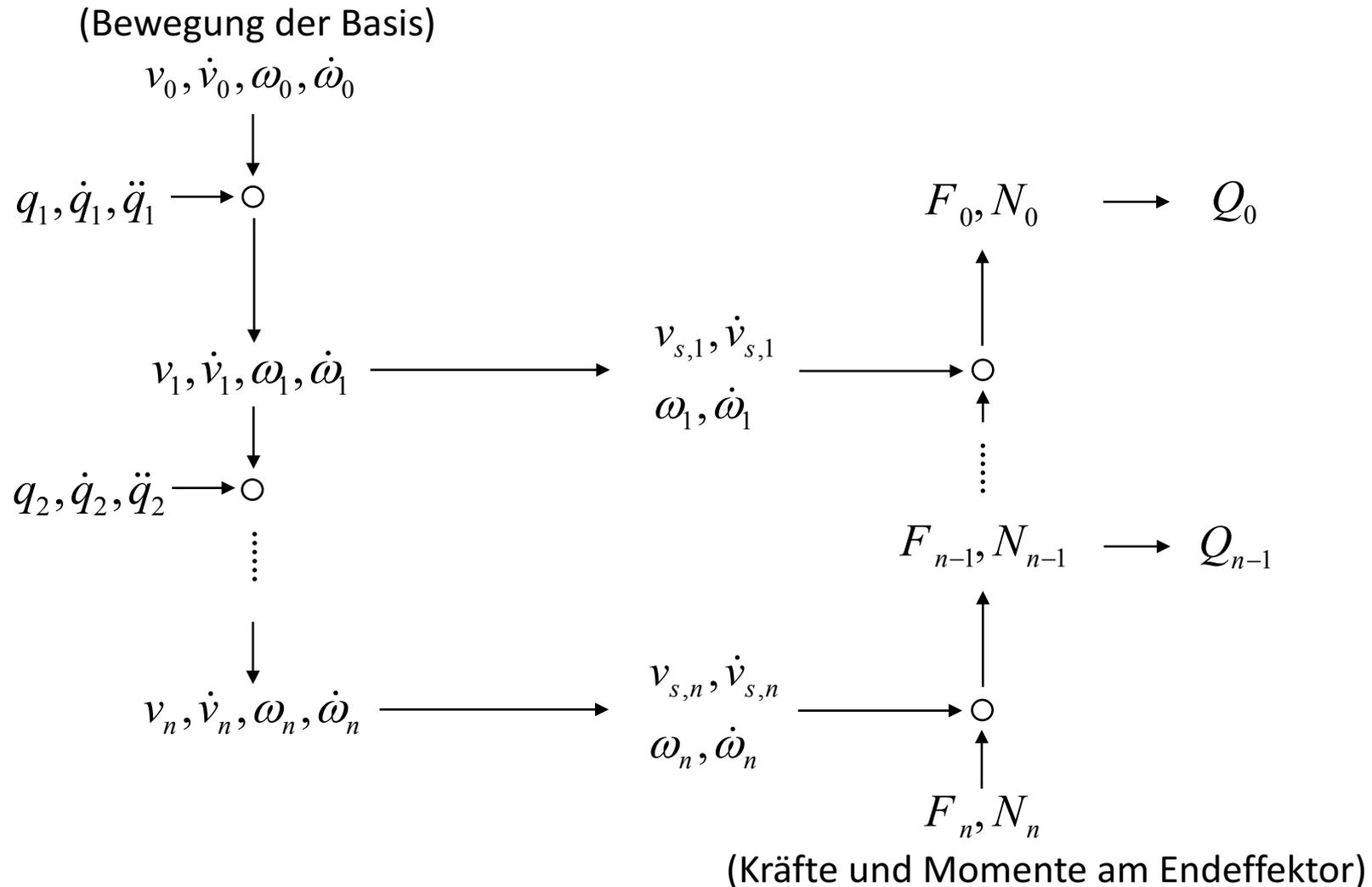
$$\mathbf{n}_i = H_4(\mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{f}_{i+1}, \mathbf{F}_i, \mathbf{N}_i, \mathbf{q}_{i+1})$$

$$\tau_i = H_5(\mathbf{n}_i, \mathbf{q}_i)$$



$$\boldsymbol{\tau}(t)$$

# Methode nach Newton-Euler: Zusammenfassung

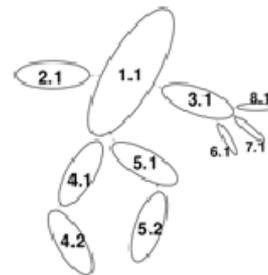
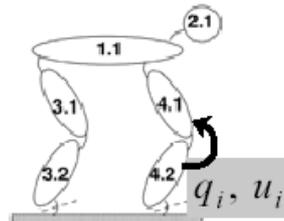
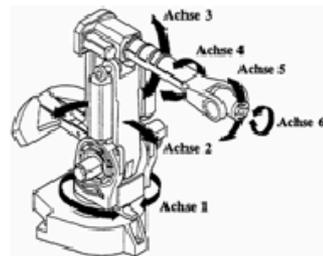


# Methode nach Newton-Euler: Eigenschaften

- Beliebige Anzahl von Gelenken
- Belastungen der Armelemente werden berechnet
- Aufwand  $O(n)$  ( $n$ : Anzahl der Gelenke)
- Rekursion

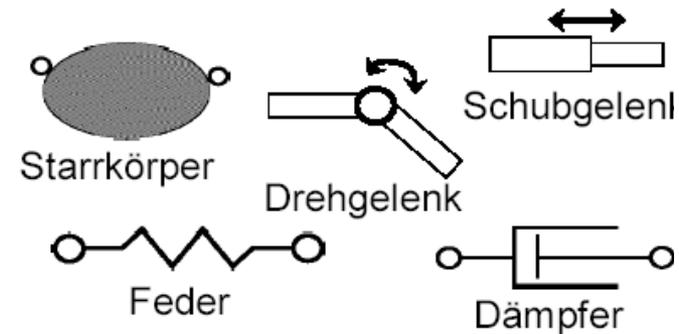
# Dynamisches Modell

## ■ Modellierung der Roboterdynamik



### Mechanischer Aufbau:

- über Gelenke gekoppelte Teilkörper, z.B.



- Antriebe in den (meisten) Gelenken

